

Zagadnienia na egzamin dyplomowy licencjacki
Matematyka
Obowiązują od roku akademickiego 2021/2022

Uwagi ogólne:

Przedmiotem oceny odpowiedzi studenta na egzaminie dyplomowym jest nie tylko znajomość wylosowanego zagadnienia, ale również sposób jego prezentacji w języku matematyki (np. poprawność sformułowania definicji i twierdzeń, jakość zapisu symbolicznego) i umiejętność znajdowania powiązań z innymi zagadnieniami z zakresu studiów I stopnia.

Zagadnienia zostały sformułowane w sposób szeroki. Komisja egzaminacyjna ma możliwość doprecyzowania zagadnienia.

Wstęp do matematyki

1. Relacja równoważności, przykłady relacji równoważności. Zbiór ilorazowy. Zasada abstrakcji.
2. Równoliczność zbiorów i moc zbioru. Zbiory przeliczalne i zbiory mocy continuum. Przykłady.
3. Zbiory uporządkowane: częściowo, liniowo i dobrze uporządkowane.
4. Pojęcie funkcji jako relacji i własności funkcji. Obraz i przeciwobraz zbioru względem funkcji. Pojęcie suriekcji, iniekcji i bijekcji
5. Zasada indukcji matematycznej i przykłady jej zastosowania.

Analiza matematyczna i równania różniczkowe

6. Granica ciągu liczbowego. Związki między monotonicznością, ograniczonością i zbieżnością ciągu.
7. Granica funkcji jednej i wielu zmiennych. Związki granicy funkcji z działaniami arytmetycznymi, ograniczonością i monotonicznością funkcji.
8. Ciągłość funkcji jednej i wielu zmiennych. Związek ciągłości i granicy funkcji. Własności funkcji ciągłych na przedziale domkniętym i ograniczonym.
9. Różniczkowalność funkcji jednej i wielu zmiennych. Związek ciągłości i różniczkowalności funkcji.
10. Ekstremum lokalne funkcji jednej i wielu zmiennych. Związek ekstremów z pochodnymi. Warunki konieczne i dostateczne istnienia ekstremum.
11. Monotoniczność i wypukłość funkcji jednej zmiennej. Związek między pochodnymi a monotonicznością i wypukłością funkcji
12. Szereg liczbowy zbieżny, warunek konieczny zbieżności. Podstawowe kryteria zbieżności szeregów liczbowych. Przykłady szeregów liczbowych zbieżnych i rozbieżnych.

13. Funkcja pierwotna i całka nieoznaczona. Podstawowe własności całki nieoznaczonej. Przykłady klas funkcji całkowalnych w sposób elementarny.
14. Całka oznaczona: istnienie, własności, związek z całką nieoznaczoną, zastosowania geometryczne.
15. Ciągi i szeregi funkcyjne, kryteria zbieżności. Szeregi potęgowe.
16. Funkcja uwikłana, jej istnienie i różniczkowalność.
17. Ekstrema warunkowe, warunek konieczny I rzędu, mnożniki Lagrange'a.
18. Wielowymiarowa całka Riemanna, całka iterowana, twierdzenie Fubiniego.
19. Całki krzywoliniowe: niezorientowana i zorientowana, związek pomiędzy nimi. Twierdzenie Greena.
20. Równania różniczkowe. Równania różniczkowe zwyczajne i ich przykłady.

Algebra

21. Liczby zespolone. Pojęcie liczby zespolonej. Postać trygonometryczna. Działania na liczbach zespolonych. Ciało liczb zespolonych. Zasadnicze twierdzenie algebry
22. Macierze i operacje na macierzach oraz ich własności. Macierz odwzorowania liniowego.
23. Przestrzeń wektorowa: definicja i przykłady, układy liniowo niezależne, baza i wymiar przestrzeni wektorowej, podprzestrzenie wektorowe i sumy proste podprzestrzeni.
24. Układy równań liniowych, rodzaje układów, twierdzenie Kroneckera-Capelliego, metody rozwiązywania układów równań liniowych.
25. Odwzorowania liniowe: monomorfizmy, epimorfizmy i izomorfizmy, jądro i obraz odwzorowania liniowego.
26. Endomorfizmy liniowe, wielomian charakterystyczny endomorfizmu liniowego (macierzy kwadratowej), wartości własne i wektory własne.
27. Diagonalizacja macierzy kwadratowej (endomorfizmu liniowego) i postać Jordana macierzy. Twierdzenie Jordana
28. Iloczyn skalarny w przestrzeniach wektorowych (nad \mathbb{R} i nad \mathbb{C}): definicja, przykłady, własności, norma wyznaczona przez iloczyn skalarny, układy ortogonalne i ortonormalne
29. Przestrzenie afiniczne, podprzestrzenie afiniczne, odwzorowania afiniczne, proste i płaszczyzny w przestrzeniach afinicznych.
30. Grupy: podgrupy, warstwy, twierdzenie Lagrange'a. Dzielniki normalne, grupy ilorazowe, homomorfizmy grup., twierdzenie o izomorfizmie
31. Pierścienie, ideały, pierścienie ilorazowe, homomorfizmy pierścieni, twierdzenie o izomorfizmie.
32. Teoria podzielności w pierścieniach całkowitych, pierścienie z jednoznacznością rozkładu, pierścienie Euklidesa, algorytm Euklidesa. Kongruencje w pierścieniu liczb całkowitych. Cechy podzielności liczb całkowitych.
33. Pierścienie wielomianów. Operacje na wielomianach. Własności pierścienia wielomianów. Podzielność i rozkładalność wielomianów.
34. Ciało, podciało, charakterystyka ciała. Ciało algebraicznie domknięte. Rozszerzenie algebraiczne ciała. Konstrukcja ciał skończonych

Rachunek prawdopodobieństwa I

35. Przestrzeń probabilistyczna. Prawdopodobieństwo i jego własności. Prawdopodobieństwo klasyczne.
36. Prawdopodobieństwo warunkowe, prawdopodobieństwo całkowite i twierdzenie Bayesa.
37. Zmienna losowa. Rozkład zmiennej losowej. Rozkłady ciągłe i dyskretne. Dystrybuanta i funkcja gęstości. Rozkład normalny i jego własności.
38. Charakterystyki liczbowe rozkładu zmiennej losowej. Wartość oczekiwana i wariancja zmiennej losowej.
39. Zbieżności i twierdzenia graniczne w rachunku prawdopodobieństwa.

Statystyka I

40. Statystyka opisowa. Charakterystyki liczbowe struktury zbiorowości: miary tendencji centralnej, położenia, rozproszenia i asymetrii.
41. Estymacja punktowa i przedziałowa parametrów populacji.
42. Testowanie hipotez statystycznych. Etapy testowania i rodzaje testów. Przykłady testów.

Topologia I

43. Przestrzeń metryczna. Zbieżność ciągów w przestrzeniach metrycznych. Podzbiory otwarte i podzbiory domknięte. Ciągłość odwzorowania przestrzeni metrycznych.
44. Przestrzeń topologiczna. Sposoby zadawania topologii. Przykłady. Przestrzeń metryczna jako przestrzeń topologiczna
45. Własności przestrzeni topologicznych. Aksjomaty oddzielania.
46. Zwartość i spójność zbiorów w przestrzeniach metrycznych i w przestrzeniach topologicznych
47. Odwzorowania przestrzeni topologicznych. Ciągłość odwzorowania. Pojęcie homeomorfizmu

Inne

48. (Geometria różniczkowa) Pojęcie krzywej regularnej i unormowanej.
49. (Matematyka dyskretna) Metody zliczania: permutacja, kombinacja i wariacje.