

I Wojewódzki Konkurs Matematyczny dla uczniów klas I i II szkół średnich województwa świętokrzyskiego

Zawody pierwszego stopnia (3 marca 2022 r.).

1. Rozłóż na czynniki pierwsze liczbę $10^6 + 10^7 + 10^8$.
2. Wykaż, że liczba $\sqrt{7 - \sqrt{48}} + \sqrt{12 + \sqrt{108}}$ jest liczbą całkowitą.
3. Rozwiąż układ równań
$$\begin{cases} |x| + |y| = 4 \\ 3|x| = y + 6 \end{cases}$$
4. Dany jest równoległobok $ABCD$. Punkty M jest środkiem boku BC , punkt N jest środkiem boku CD . Jaką częścią pola równoległoboku jest pole trójkąta AMN ?
5. Wyznacz największą możliwą liczbę części, na które można podzielić płaszczyznę za pomocą 10 prostych?
6. Wykaż, że liczba $\sqrt[3]{5}$ jest liczbą niewymierną.
7. Wykaż, że dla dowolnej liczby pierwszej $p > 3$ liczba $p^2 - 1$ jest podzielna przez 24.
8. W kwadracie $ABCD$ punkt K to środek boku AB , L - środek boku BC , M - środek CD , N - środek DA . Wewnątrz kwadratu jest taki punkt P , że pole czworokąta $KBLP$ jest równe 16 cm^2 , pole czworokąta $LCMP$ jest równe 20 cm^2 , pole czworokąta $MDNP$ jest równe 32 cm^2 . Wyznacz pole czworokąta $NAKP$.
9. W każde pole tablicy o wymiarach 5×5 wpisano liczbę 0 lub 1. Następnie obliczono sumy liczb stojących w każdym wierszu, w każdej kolumnie i na obu przekątnych. Wykaż, że co najmniej trzy sumy są jednakowe.
10. Dana jest liczba rzeczywista a taka, że liczby $a^2 - a$ oraz $a^3 + a$ są wymierne. Udowodnij, że liczba a jest wymierna.

Informacje dla uczestnika zawodów

- Czas trwania zawodów: 90 minut.
- Należy pisać na białym papierze (może być w kratkę), nie używać koloru czerwonego.
- W przypadku stwierdzenia niesamodzielności pracy w czasie zawodów lub w trakcie jej oceny, praca zostanie unieważniona.
- Nie wolno korzystać z telefonów komórkowych; muszą być schowane i wyłączone.
- Można korzystać z tablic z wzorami matematycznymi, linijki, cyrkla i kalkulatora prostego.