

Jak zaplanować własny fundusz emerytalny

Święto liczby π

Wojciech Jabłoński, wojciech.jablonski@ujk.edu.pl¹⁾

1 Kapitał finansowy

Definicja. Kapitałem finansowym nazywamy zasoby pieniężne stosowane w produkcji oraz nagromadzone dobra służące rozwojowi.

Własność (zasada aprecjacji kapitału). Jeśli dwie nierównoczesne należności są jednakowo użyteczne, to wartość należności płatnej później jest większa od wartości należności płatnej wcześniej.

Własność (proces aprecjacji należności). Wartość należności rośnie wraz z czasem, po jakim ta należność będzie płatna.

Definicja. Prędkość aprecjacji kapitału jest równa stosunkowi względnego przyrostu wartości kapitału do długości okresu, w jakim ten przyrost wartości się dokonał.

1.1 Stopy procentowe

Definicja. Stopa procentowa jest opłatą za odroczenie płatności o ustalony okres, tzn.

$$r_{\Delta t} = \frac{\Delta C}{C_0} = \frac{C_{\Delta t} - C_0}{C_0}.$$

Definicja. Nominalna stopa procentowa jest równocześnie:

- (i) rocznym kosztem odroczenia płatności o jednostkowej wartości na ustalony okres,
- (ii) rocznym przychodem z tytułu aprecjacji kapitału o jednostkowej wartości w ciągu ustalonego okresu.

W obu przypadkach mamy

$$p_{\Delta t} = \frac{r_{\Delta t}}{\Delta t} = \frac{\Delta C}{\Delta t \cdot C_0} = \frac{C_{\Delta t} - C_0}{\Delta t \cdot C_0}.$$

2 Model wzrostu kapitału

2.1 Wartość przyszła

Definicja. Wartością przyszłą nazywamy funkcję $s : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ spełniającą warunki:

- (i) $s(C_1 + C_2, t) = s(C_1, t) + s(C_2, t)$ dla $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ oraz $t \in \mathbb{R}_+$,
- (ii) $s(C, t_1) \leq s(C, t_2)$ dla takich $C \in \mathbb{R}$, $t_1, t_2 \in \mathbb{R}_+$, że $C > 0$, $t_1 \leq t_2$,
- (iii) $s(C, 0) = C$ dla każdego $C \in \mathbb{R}$.

Twierdzenie 2.1. Funkcja $s : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ spełnia warunki (i)–(iii) wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje taka niemalejąca funkcja²⁾ $v : \mathbb{R}_+ \rightarrow [1, \infty)$, że $v(0) = 1$ oraz

$$(1) \quad s(C, t) = C \cdot v(t) \quad \text{dla } C \in \mathbb{R} \text{ oraz } t \in \mathbb{R}_+.$$

¹⁾autor materiału będzie niezmiennie wdzięczny za wszystkie przesłane uwagi dotyczące przedstawionych treści przepraszając jednocześnie za wszelkie usterki.

²⁾nazywana **czynnikami aprecjacji**

2.2 Odsetki - oprocentowanie proste

Definicja. *Oprocentowaniem prostym* przy stałej **nominalnej** stopie procentowej $p > 0$ nazywamy funkcję $o(\cdot, \cdot|p) : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ spełniającą warunki:

- (i) $o(C_1 + C_2, t|p) = o(C_1, t|p) + o(C_2, t|p)$ dla $C_1, C_2 \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}_+$,
- (ii) $o(C, t_1 + t_2|p) = o(C, t_1|p) + o(C, t_2|p)$ dla $C \in \mathbb{R}, t_1, t_2 \in \mathbb{R}_+$,
- (iii) $o(C, t|p) > 0$ dla takich $C \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}_+$, że $C > 0$ oraz $t > 0$,
- (iv) $o(1, 1|p) = p$.

Twierdzenie 2.2. *Funkcja $o(\cdot, \cdot|p) : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ jest oprocentowaniem prostym przy stałej nominalnej stopie procentowej $p > 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$(2) \quad o(C, t|p) = Ctp \quad \text{dla } C \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}_+.$$

2.3 Oprocentowanie złożone

Niech $\Phi = ((t_{i-1}, t_i], p_i)_{i=1}^n$ będzie rozkładem stóp procentowych na przedziale czasu $[0, T]$, przy czym $t_0 = 0, t_n = T$ oraz $(t_i)_{i=1}^n$ jest ciągiem wszystkich momentów, w których dochodzi do **kapitalizacji** składanej odsetek rozumianej jako umorzenie należności z tytułu odsetek w zamian za powiększenie wartości tego kapitału w każdym momencie t_1, \dots, t_n .

Definicja. Każdy z przedziałów $(t_{i-1}, t_i]$ długości $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$ nazywamy **okresem kapitalizacji**.

Definicja (Kapitalizacja z dołu). Kapitalizacja dokonuje się na końcu każdego z okresów kapitalizacji a podstawą jest wartość kapitału określona na początku tego okresu.

2.4 Wartość skapitalizowana z dołu

Definicja. *Wartością kapitalizowaną z dołu* nazywamy funkcję $FV(\cdot, \cdot|\Phi) : \mathbb{R} \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ spełniającą warunki:

- (i) $FV(C, 0|\Phi) = C$ dla $C \in \mathbb{R}$,
- (ii) $FV(C, t|\Phi) = FV(C, t_{i-1}|\Phi) = C_{i-1}, C \in \mathbb{R}, i \in \{1, \dots, n\}, t \in (t_{i-1}, t_i)$,
- (iii) $FV(C, t_i|\Phi) - FV(C, t_{i-1}|\Phi) = o(C_{i-1}, \Delta t_i|p_i)$ dla $C \in \mathbb{R}, i \in \{1, \dots, n\}$.

Twierdzenie 2.3. *Wartość kapitalizowana z dołu $FV(\cdot, \cdot|\Phi) : \mathbb{R} \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ jest określona wzorem³⁾*

$$(3) \quad FV(C, t|\Phi) = \begin{cases} C \prod_{j=1}^{k-1} (1 + p_j \Delta t_j) & \text{dla } k \in \{1, \dots, n\}, t \in [t_{k-1}, t_k), \\ C \prod_{j=1}^n (1 + p_j \Delta t_j) & \text{dla } t = t_n = T. \end{cases}$$

2.5 Regularna struktura terminowa

Niech $\Phi = (((i-1)\Delta t, i\Delta t], p)_{i=1}^n$ będzie regularną strukturą terminową nominalnej stopy procentowej na przedziale czasu $[0, n\Delta t]$, gdzie $(i\Delta t)_{i=1}^n$ jest ciągiem wszystkich momentów, w których dochodzi do kapitalizacji odsetek.

Wniosek 2.1. *Wartość kapitalizowana z dołu $FV(\cdot, \cdot|\Delta t, p) : \mathbb{R} \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ jest określona wzorem*

$$(4) \quad FV(\cdot, \cdot|\Delta t, p) = \begin{cases} C(1 + p\Delta t)^{i-1} & \text{dla } i \in \{1, \dots, n\}, t \in [t_{i-1}, t_i), \\ C(1 + p\Delta t)^n & \text{dla } t = t_n = T. \end{cases}$$

³⁾ $\prod_{j=1}^0 (1 + p^j \Delta t_j) = 1$

3 Model

$$\begin{aligned}
 FV_1 &= PV(1 + r_1) + PMT_1, \\
 FV_2 &= FV_1(1 + r_2) + PMT_2 = PV(1 + r_1)(1 + r_2) + PMT_1(1 + r_2) + PMT_2, \\
 FV_3 &= PV(1 + r_1)(1 + r_2)(1 + r_3) + PMT_1(1 + r_2)(1 + r_3) + \\
 &\quad + PMT_2(1 + r_3) + PMT_3, \\
 &\vdots \\
 FV_n &= PV \prod_{i=1}^n (1 + r_i) + \sum_{j=1}^{n-1} PMT_j \prod_{i=j+1}^n (1 + r_i) + PMT_n.
 \end{aligned}$$

3.1 Uproszczenie

Przyjmujemy: $r_i = r$ dla $i \in \{1, \dots, n\}$ oraz $PMT_i = PMT$ dla $i \in \{1, \dots, n\}$. Wtedy

$$\begin{aligned}
 FV_n &= PV(1 + r)^n + \sum_{j=1}^{n-1} PMT(1 + r)^{n-j} + PMT \\
 &= PV(1 + r)^n + PMT \frac{(1 + r)^n - 1}{r}.
 \end{aligned}$$

Wbudowane funkcje finansowe pakietu **MS Excel** używają formuły

$$FV_n + PV(1 + r)^n + PMT \frac{(1 + r)^n - 1}{r} = 0$$

dla uwzględnienia **kierunku przepływu kapitału**.

4 Opis pliku

Załączony plik z arkuszami *Funduszek* oraz *Fundusz* zawiera jedynie pewną pogładową i **wysoce niedokładną** symulację. Anonsowana niedokładność jest konsekwencją przyjętych we wszystkich rachunkach (i nierealnych w rzeczywistym świecie!) stałej stopy zwrotu z inwestycji i stałej średniej rocznej stopy inflacji przez cały okres gromadzenia kapitału, a następnie jego wykorzystania (rzeczywistość jest niestety bogata a przyszłość nieprzewidywalna!). Prowadzić to może w przypadku dużej ich zmienności w czasie ponad 50 lat (40 lat gromadzenia kapitału i 15 lat wypłat) do dużych różnic z rzeczywistą wartością zgromadzonego w przyszłości kapitału i późniejszych wypłat!

4.1 Arkusz *Funduszek*

Infantylna wersja własnego planu emerytalnego (nie uwzględnia inflacji!!!), wszystkie późniejsze wpłaty do prywatnego funduszu są stałe, więc ze względu na inflację, wraz z upływem czasu będą miały realnie niższą wartość.

1. zakres B2:C6:

wkład początkowa wpłata inicjująca założenie funduszu,

wpłaty comiesięczne (stałe przez cały okres oszczędzania!) wpłaty wnoszone na koniec każdego miesiąca,

lata liczba lat "trwania" funduszu,

stopa stała przez cały okres "trwania funduszu" stopa wzrostu (nominalna stopa procentowa z kapitalizacją miesięczną!),

Fundusz "Jutro" końcowa wartość przyszła (za 40 lat!) środków zgromadzonych na funduszu;

2. zakres E2:F4:

inflacja średnioroczna (hipotetyczna) inflacja w okresie 40 przyszłych lat,
Fundusz "Dziś" początkowa wartość zgromadzonych w okresie 40 lat środków w Funduszu "Jutro" zdyskontowana na dzień dzisiejszy stopą inflacji;

3. zakres E8:F10:

wpłata "Dziś" początkowa przybliżona wartość ostatniej z wnoszonych w okresie 40 lat wpłat miesięcznych zdyskontowana na dzień dzisiejszy stopą inflacji;

4. zakres H2:I5:

wkład stan Funduszu "Jutro",
lata planowany okres wykorzystania środków zgromadzonych w funduszu,
stopa stała przez cały okres wykorzystania funduszu stopa wzrostu (nominalna stopa procentowa z kapitalizacją miesięczną!),
emerytura miesięczna kwota dodatkowej (stałej przez cały okres wykorzystania funduszu) emerytury;

5. zakres H9:H11:

ostatnia E początkowa (dzisiejsza) przybliżona wartość ostatniej dodatkowej emerytury.

Uwaga. Przyjęte uproszczenia stałej okresowej wpłaty przez okres 40 lat i stałej "dodatkowej emerytury" są wysoce niedoskonałe. Arkusz **Fundusz** proponuje rozwiązanie części tych wad. Zakładamy jednak nadal stałą stopę wzrostu kapitału w gromadzonym Funduszu przez okres 40 lat oraz w trakcie wypłat przez okres x lat (nierealne, ale te stopy i tak są prognozowane!) jak też stałą średnioroczną stopę inflacji w rozważanych okresach.

4.2 Arkusz *Fundusz*

Zakładamy 40-letni okres gromadzenia środków. Zakres C3:H4:

Wkład początkowa wpłata inicjująca założenie funduszu,

Wpłaty comiesięczne (waloryzowane co roku!) wpłaty wnoszone na koniec każdego miesiąca,

Inflacja średnioroczna stopa inflacji w okresie 40 lat,

Wskaźnik zakładany wskaźnik wzrostu ponad inflację miesięcznych wpłat (po każdym roku miesięczna wpłata wzrasta o podany wskaźnik)

Stopa stała przez cały okres "trwania funduszu" stopa wzrostu (nominalna stopa procentowa z kapitalizacją miesięczną!);

Zakładamy 15-letni okres wykorzystania dzisiejszej wartości środków zgromadzonych w funduszu. W zakresie C10:H11 przedstawiono infantylną wersję stałych miesięcznych wypłat. W zakresie K3:R4 urealniona wersja zakładająca coroczny wzrost wypłacanych "dodatkowych emerytur"

Wkład dzisiejsza wartość zgromadzonych środków,

stopa stała przez cały okres "trwania funduszu" stopa wzrostu (nominalna stopa procentowa z kapitalizacją miesięczną!);

Inflacja średnioroczna stopa inflacji w okresie 40 lat,

Wskaźnik zakładany wskaźnik wzrostu ponad inflację miesięcznych wypłat (po każdym roku miesięczna wpłata wzrasta o podany wskaźnik),

emerytura początkowa wartość zmieniana poprzez wywołanie procedury SzukajWyniku:

Ustaw komórkę: wpisać adres R4 wartości *Wydano*,

Wartość: wpisać wartość wkładu z komórki K4,

Zmieniając komórkę: wpisać adres Q4 wpisanej wcześniej fikcyjnej wysokości emerytury.