

IV Wojewódzki Konkurs Matematyczny dla uczniów klas I i II szkół średnich województwa świętokrzyskiego

Zawody pierwszego stopnia (6 luty 2025 r.).

1. Wykaż, że jeżeli

$$0 < a_1 < a_2 < a_3 < a_4 < a_5 < a_6 < a_7 < a_8,$$

to

$$\frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 + a_8}{a_6 + a_8} < 4.$$

2. Rozwiąż nierówność

$$|x(x^2 - 4)| + |x(x^2 - 2025)| + |x(x+1)(x+2)(x+3) \cdot \dots \cdot (x+50)| \leq 0.$$

3. Wykaż, że dla wszystkich liczb całkowitych dodatnich x i m wartości funkcji

$$f(x) = x^2 + 2(m+2)x + m^2 + 4m + 4$$

są liczbami złożonymi.

4. Dany jest trójkąt równoboczny ABC . Punkt M jest takim punktem boku AC , że $MC = 2 \cdot MA$. Punkty K i L dzielą bok BC na trzy równe części. Wykaż, że

$$\angle AKM + \angle ALM = 30^\circ.$$

5. Niech a będzie liczba naturalna mająca 2025 cyfr i podzielna przez 9. Sumę cyfr tej liczby oznaczmy przez A , sumę cyfr liczby A oznaczmy przez B , sumę cyfr liczby B oznaczmy przez C . Wyznacz liczbę C .

6. Rozstrzygnij, czy istnieją takie liczby rzeczywiste x, y, z , że

$$x + y + z = xy + yz + zx = 2.$$

Informacje dla uczestnika zawodów

- Czas trwania zawodów: 90 minut.
- Należy pisać na białym papierze (może być w kratkę), nie używać koloru czerwonego.
- W przypadku stwierdzenia niesamodzielności pracy w czasie zawodów lub w trakcie jej oceny, praca zostanie unieważniona.
- Nie wolno korzystać z telefonów komórkowych; muszą być schowane i wyłączone.
- Można korzystać z tablic z wzorami matematycznymi, linijki, cyrkla i kalkulatora prostego.