

KATEDRA MATEMATYKI UJK

ZAGADNIENIA NA EGZAMIN DYPLOMOWY LICENCJACKI

Obowiązują od roku akademickiego 2025/2026

Uwagi ogólne: Przedmiotem oceny odpowiedzi studenta na egzaminie dyplomowym jest nie tylko znajomość wylosowanego zagadnienia, ale również sposób jego prezentacji w języku matematyki (np. poprawność sformułowania definicji i twierdzeń, jakość zapisu symbolicznego) i umiejętność znajdowania powiązań z innymi zagadnieniami z zakresu studiów I stopnia. Zagadnienia zostały sformułowane w sposób szeroki. Komisja egzaminacyjna ma możliwość doprecyzowania zagadnienia.

1. Relacja równoważności, przykłady relacji równoważności. Zbiór ilorazowy. Zasada abstrakcji.
2. Równoliczność zbiorów i moc zbioru. Zbiory przeliczalne i zbiory mocy continuum. Przykłady.
3. Zbiory uporządkowane: częściowo, liniowo i dobrze uporządkowane.
4. Pojęcie funkcji jako relacji i własności funkcji. Obraz i przeciwobraz zbioru względem funkcji. Pojęcie suriekcji, iniekcji i bijekcji.
5. Aksjomatyka liczb rzeczywistych.
6. Zasada indukcji matematycznej i przykłady jej zastosowania.
7. Ciągi liczbowe. Granica ciągu. Związki między monotonicznością, ograniczonością i zbieżnością ciągu.
8. Szeregi liczbowe. Podstawowe kryteria zbieżności szeregów liczbowych. Przykłady szeregów liczbowych zbieżnych i rozbieżnych.
9. Granica funkcji jednej i wielu zmiennych. Związki granicy funkcji z działaniami arytmetycznymi. Reguła de l'Hospitala.
10. Ciągłość funkcji jednej i wielu zmiennych. Związek ciągłości i granicy funkcji. Własności funkcji ciągłych na przedziale domkniętym i ograniczonym.
11. Różniczkowalność funkcji jednej i wielu zmiennych. Związek ciągłości i różniczkowalności funkcji.

12. Ekstremum lokalne funkcji jednej i wielu zmiennych. Związek ekstremów z pochodnymi. Warunki konieczne i dostateczne istnienia ekstremum.
13. Monotoniczność i wypukłość funkcji jednej zmiennej. Związek między pochodnymi a monotonicznością i wypukłością funkcji.
14. Ciągi i szeregi funkcyjne, kryteria zbieżności. Szeregi potęgowe.
15. Funkcja pierwotna i całka nieoznaczona. Podstawowe własności całki nieoznaczonej. Przykłady klas funkcji całkownych w sposób elementarny.
16. Całka oznaczona: istnienie, własności, związek z całką nieoznaczoną, zastosowania geometryczne.
17. Funkcja uwikłana, jej istnienie i różniczkowalność.
18. Ekstrema warunkowe, warunek konieczny I rzędu, mnożniki Lagrange'a.
19. Wielowymiarowa całka Riemanna, całka iterowana, twierdzenie Fubiniego.
20. Całki krzywoliniowe: nieorientowana i zorientowana, związek pomiędzy nimi. Twierdzenie Greena.
21. Równania różniczkowe zwyczajne i ich przykłady. Twierdzenie o istnieniu i jednoznaczności rozwiązań.
22. Liczby zespolone. Pojęcie liczby zespolonej. Postać trygonometryczna. Działania na liczbach zespolonych. Ciało liczb zespolonych. Zasadnicze twierdzenie algebry.
23. Macierze i operacje na macierzach oraz ich własności. Macierz odwzorowania liniowego.
24. Przestrzeń wektorowa: definicja i przykłady, układy liniowo niezależne, baza i wymiar przestrzeni wektorowej, podprzestrzenie wektorowe i sumy proste podprzestrzeni.
25. Układy równań liniowych, rodzaje układów, twierdzenie Kroneckera-Capelliego, metody rozwiązywania układów równań liniowych.
26. Odwzorowania liniowe: monomorfizmy, epimorfizmy i izomorfizmy, jądro i obraz odwzorowania liniowego.
27. Endomorfizmy liniowe, wielomian charakterystyczny endomorfizmu liniowego (macierzy kwadratowej), wartości własne i wektory własne.
28. Diagonalizacja macierzy kwadratowej (endomorfizmu liniowego) i postać Jordana macierzy. Twierdzenie Jordana.
29. Iloczyn skalarny w przestrzeniach wektorowych (nad $\mathbb{R}$ i nad $\mathbb{C}$): definicja, przykłady, własności, norma wyznaczona przez iloczyn skalarny, układy ortogonalne i ortonormalne.

30. Przestrzenie afiniczne, podprzestrzenie afiniczne, odwzorowania afiniczne, proste i płaszczyzny w przestrzeniach afinicznych.
31. Grupy: pojęcie grupy, podział grupy na warstwy względem podgrupy, twierdzenie Lagrange'a, grupy ilorazowe, homomorfizmy grup, twierdzenie o izomorfizmie dla grup.
32. Pierścienie: pojęcie pierścienia i szczególne rodzaje pierścieni, ideały, pierścienie ilorazowe, homomorfizmy pierścieni, twierdzenie o izomorfizmie.
33. Teoria podzielności w pierścieniach całkowitych: pojęcie podzielności i pojęcia z nim związane, pierścienie z jednoznacznością rozkładu, pierścienie Euklidesa, algorytm Euklidesa. Kongruencje w pierścieniu liczb całkowitych i ich zastosowanie.
34. Pierścienie wielomianów. Operacje na wielomianach. Własności pierścienia wielomianów. Podzielność i rozkładalność wielomianów.
35. Ciało, podciało, charakterystyka ciała. Ciało algebraicznie domknięte. Rozszerzenie algebraiczne ciała. Konstrukcja ciał skończonych.
36. Przestrzeń probabilistyczna. Prawdopodobieństwo i jego własności. Prawdopodobieństwo klasyczne.
37. Prawdopodobieństwo warunkowe, prawdopodobieństwo całkowite i twierdzenie Bayesa.
38. Zmienna losowa. Rozkład zmiennej losowej. Rozkłady ciągłe i dyskretne. Dystrybucja i funkcja gęstości. Rozkład normalny i jego własności.
39. Charakterystyki liczbowe rozkładu zmiennej losowej. Wartość oczekiwana i wariancja zmiennej losowej.
40. Statystyka opisowa. Charakterystyki liczbowe struktury zbiorowości: miary położenia, rozproszenia, asymetrii i koncentracji.
41. Estymacja punktowa i przedziałowa parametrów populacji.
42. Testowanie hipotez statystycznych. Etapy testowania i rodzaje testów. Przykłady testów.
43. Przestrzeń metryczna. Zbieżność ciągów w przestrzeniach metrycznych. Podzbiory otwarte i podzbiory domknięte. Ciągłość odwzorowania przestrzeni metrycznych.
44. Przestrzeń topologiczna. Sposoby zadawania topologii. Przykłady. Przestrzeń metryczna jako przestrzeń topologiczna.
45. Własności przestrzeni topologicznych. Aksjomaty oddzielania.
46. Zwartość i spójność zbiorów w przestrzeniach metrycznych i w przestrzeniach topologicznych.

- 47. Odwzorowania przestrzeni topologicznych. Ciągłość odwzorowania. Pojęcie homeomorfizmu.
- 48. Pojęcie krzywej regularnej i regularnej krzywej unormowanej, trójnóg i trójścian Fréneta, krzywizna krzywej regularnej.
- 49. Pojęcie powierzchni regularnej w $\mathbb{R}^3$, przestrzeń styczna i płaszczyzna styczna, krzywizny powierzchni gładkiej, geodezyjne.
- 50. Metody zliczania: permutacje, kombinacje i wariacje.
- 51. Grafy: podstawowe klasy, własności grafów.