

IV Wojewódzki Konkurs Matematyczny dla uczniów klas I i II szkół średnich województwa świętokrzyskiego

Zawody finałowe (15 maja 2025 r.).

1. Na tablicy zapisano n kolejnych liczb naturalnych, których suma jest równa 2025. Wyznacz wszystkie wartości $n > 1$, dla których jest to możliwe.
2. Punkt D jest spodkiem wysokości CD trójkąta prostokątnego ABC o kącie prostym przy wierzchołku C . Odległość punktu D od boku AC wynosi 5 cm, a od boku BC — 12 cm. Oblicz pole trójkąta ABC .
3. Wykaż, że dla każdej liczby dodatniej a i każdej liczby dodatniej b takich, że $a + b = 1$, prawdziwa jest nierówność

$$\frac{1}{5a + b} + \frac{1}{5b + a} \geq \frac{2}{3}.$$

4. Wyznacz wszystkie wartości parametru m dla których równanie

$$x^2 - 2mx + m + 1 = 0$$

ma dwa różne rozwiązania, z których dokładnie jedno jest w przedziale $(1; 3)$.

5. Rozwiąż równanie w zbiorze liczb rzeczywistych

$$x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0$$

6. Dany jest trójkąt ABC , w którym $\angle ACB = 120^\circ$. Dwusieczna kąta ACB przecina prostą przechodzącą przez punkt A i równoległą do boku BC w punkcie P , a prostą przechodzącą przez punkt B i równoległą do boku AC w punkcie Q . Wykaż, że $AQ = BP$.

Informacje dla uczestnika zawodów

- Czas trwania zawodów: 180 minut.
- Należy pisać na białym papierze (może być w kratkę), nie używać koloru czerwonego.
- W przypadku stwierdzenia niesamodzielnosci pracy w czasie zawodów lub w trakcie jej oceny, praca zostanie unieważniona.
- Nie wolno korzystać z telefonów komórkowych; muszą być schowane i wyłączone.
- Można korzystać z tablic z wzorami matematycznymi, linijki, cyrkla i kalkulatora prostego.